# Eletromagnetismo I - Prova 1

Prof. Marco Polo

30 de setembro de 2024

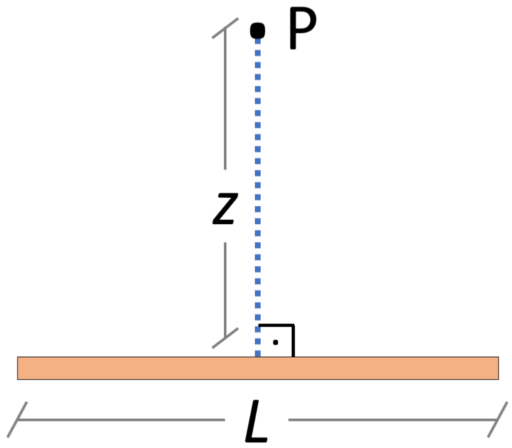
Início: 14:00 - duração: 3:00 horas

Só serão consideradas as respostas que forem devidamente justificadas.

Não é permitido o uso de calculadoras.

## Questão 01: Campo e potencial elétrico

Uma barra fina de comprimento $L$ está carregada com carga $q$ uniformemente distribuída. O ponto P está a uma distância $z$ do ponto médio da barra, como mostrado na figura.




**(a) (2,0)** Calcule o potencial elétrico no ponto P.
**(b) (1,5)** Calcule o vetor campo elétrico no ponto P.

## Questão 02: Lei de Gauss

Considere um cilindro circular longo e maciço de raio $a$ com densidade de carga volumétrica $\rho = \alpha s^3$, onde $\alpha$ é uma constante e $s$ é a distância ao eixo do cilindro. Use a lei de Gauss para encontrar o módulo do campo elétrico:

(a) **(1,5)** Dentro do cilindro, a uma distância $s$ do seu eixo.

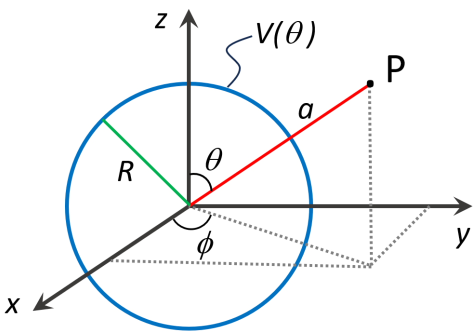
(b) **(1,5)** Fora do cilindro, a uma distância $s$ do seu eixo.

## Questão 03: (3,5) Equação de Laplace

Seja a esfera oca de raio $R$ que possui um potencial sobre a sua superfície dado por

$$V(\theta) = (3\cos^2\theta - 1)V_0.$$

Calcule o potencial elétrico no ponto P, que está a uma distância $a$ do centro da esfera exatamente como mostrado na figura. Considere que $V = 0$ em pontos muito distantes da esfera.



$$\int \frac{xdx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$$
$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}}$$
$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$$

$d\tau = dx\, dy\, dz$ (coordenadas cartesianas)
$d\tau = r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi$ (coordenadas esféricas)
$d\tau = sds\, d\phi\, dz$ (coordenadas cilíndricas)

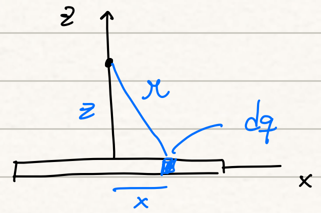
$$\nabla^2 V = 0 \rightarrow V(r,\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\left(A_\ell r^\ell + \frac{B_\ell}{r^{\ell+1}}\right)P_\ell(\cos\theta)$$

$$P_0(x) = 1$$
$$P_1(x) = x$$
$$P_2(x) = \frac{3x^2-1}{2}$$
$$P_3(x) = \frac{5x^3-3x}{2}$$

$$\int_0^\pi P_\ell(\cos\theta)P_{\ell'}(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta = \frac{2\delta_{\ell,\ell'}}{2\ell+1}$$

# GABARITO

1 — A)




$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r}$$

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda\, dx}{\sqrt{x^2+z^2}}$$

$$V = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dx}{\sqrt{x^2+z^2}}$$

$$V = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln\left(x + \sqrt{x^2+z^2}\right)\Big|_{-L/2}^{L/2}$$

$$V = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\left[\ln\left(\frac{L}{2} + \sqrt{\frac{L^2}{4}+z^2}\right) - \ln\left(-\frac{L}{2} + \sqrt{\frac{L^2}{4}+z^2}\right)\right]$$

$$V = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln\left(\frac{\sqrt{L^2/4+z^2} + L/2}{\sqrt{L^2/4+z^2} - L/2}\right)$$

$$\lambda = \frac{q}{L} \Rightarrow$$

$$\boxed{V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 L} \ln\left(\frac{\sqrt{L^2/4+z^2} + L/2}{\sqrt{L^2/4+z^2} - L/2}\right)}$$

B)

$$\bar{E} = -\bar{\nabla} V$$

$$\bar{E} = -\frac{\partial V}{\partial z}\hat{z}$$

$$\bar{E} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 L}\hat{z}\left[\frac{1}{\sqrt{L^2/4+z^2}+L/2}\cdot \cancel{\frac{1}{2}}\left(\frac{L^2}{4}+z^2\right)^{-1/2}\cdot \cancel{2}z - \frac{1}{\sqrt{L^2/4+z^2}-L/2}\cdot \cancel{\frac{1}{2}}\left(\frac{L^2}{4}+z^2\right)^{-1/2}\cdot \cancel{2}z\right]$$

$$\bar{E} = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 L} \frac{z}{\sqrt{z^2+L^2/4}}\left[\frac{1}{\sqrt{z^2+L^2/4}+L/2} - \frac{1}{\sqrt{z^2+L^2/4}-L/2}\right]\hat{z}$$

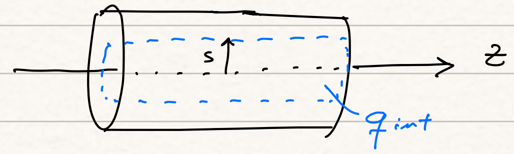
$$\bar{E} = \frac{-q z}{4\pi\epsilon_0 L\sqrt{z^2+L^2/4}}\cdot\left(\frac{\cancel{\sqrt{z^2+L^2/4}} - L/2 - \cancel{\sqrt{z^2+L^2/4}} - L/2}{z^2 + \cancel{L^2/4} - \cancel{L^2/4}}\right)\hat{z}$$

$$\bar{E} = \frac{q z}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{z^2+L^2/4}\, L}\cdot \frac{L}{z^2}\hat{z}$$

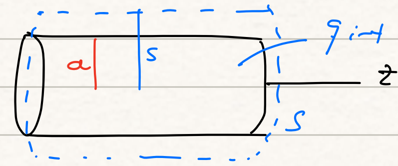
$$\boxed{\bar{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{z\sqrt{z^2+L^2/4}}\hat{z}}$$

So $z \gg L \Rightarrow \bar{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{z^2}\hat{z}$.

2- A)




B)




$$q_{int} = \int \rho \, d\tau'$$

$$q_{int} = \int_0^{s}\int_0^{2\pi}\int_0^{L} \alpha s'^3 \, s' ds' \, d\phi \, dz$$

$$q_{int} = \frac{\alpha s^5}{5} . 2\pi L$$

$$q_{int} = \frac{2\pi \alpha L s^5}{5} \Rightarrow$$

$$\oint_S \vec{E} . d\vec{a} = \frac{q_{int}}{\epsilon_0}$$

$$E . \cancel{2\pi} s \cancel{L} = \frac{\cancel{2\pi} \alpha \cancel{L} s^5}{5 \epsilon_0}$$

$$\boxed{E = \frac{\alpha s^4}{5 \epsilon_0}}$$

$$\rightarrow q_{int} = \frac{2\pi \alpha L a^5}{5} \Rightarrow$$

$$E . \cancel{2\pi} s \cancel{L} = \frac{\cancel{2\pi} \alpha \cancel{L} a^5}{5}$$

$$\boxed{E = \frac{\alpha a^5}{5 s}}$$

3- $a > R \Rightarrow$

$$V = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{B_\ell}{r^{\ell+1}} P_\ell(\cos\theta)$$

$$V(R) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{B_\ell}{R^{\ell+1}} P_\ell(\cos\theta) = (3\cos^2\theta - 1) V_0$$

$$\frac{B_0}{R} + \frac{B_1}{R^2}\cos\theta + \frac{B_2}{R^3}\,\frac{3\cos^2\theta - 1}{2} + \cdots = (3\cos^2\theta - 1) V_0$$

$$\Rightarrow B_0 = B_1 = 0 \ , \quad B_3 = B_4 = B_5 = \cdots = 0$$

$$E \quad \frac{B_2}{2R^3} = V_0 \Rightarrow B_2 = 2 V_0 R^3 \Rightarrow$$

$$V(r, \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{B_\ell}{r^{\ell+1}} P_\ell(\cos\theta)$$

$$V(a, \theta) = \frac{B_2}{a^3} P_2(\cos\theta)$$

$$= \frac{2 V_0 R^3}{a^3} \, \frac{3\cos^2\theta - 1}{2}$$

$$\boxed{V(a, \theta) = \frac{3 V_0 R^3}{a^3} (\cos^2\theta - 1)}$$