Eletromagnetismo I - Prova 2

Prof. Marco Polo

11 de novembro de 2024

Início: 14:00 - duração: 3:00 horas

Só serão consideradas as respostas que forem devidamente justificadas.

Não é permitido o uso de calculadoras.

Questão 01: Campo elétrico de uma esfera polarizada

Uma esfera de raio a, neutra, possui uma polarização dada por

$$\vec{P} = \beta \vec{r},$$

onde β é uma constante e $\vec{r}$ é o vetor a partir do centro.

(a) **(1,0)** Calcule a densidade superficial de carga de polarização.

(b) **(1,5)** Mostre que a densidade volumétrica de carga de polarização é constante e vale

$$\rho_p = -3\beta.$$

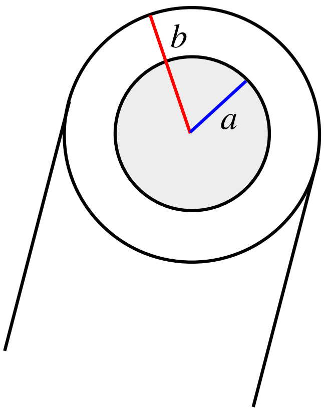
(c) **(1,5)** A partir dos resultados dos itens (a) e (b), mostre que a carga total de polarização da esfera é zero.

Questão 02: Campo magnético produzido por um cabo coaxial longo

Um cabo coaxial em formato de fio retilíneo longo (ver figura) é formado por uma região interna de raio a, por onde flui uma corrente uniforme i_a, e outra região com raio entre a e b, por onde flui uma corrente na mesma direção, porém com densidade dada por

$$J = \alpha s^2$$

onde s é a distância ao eixo do cabo e α é uma constante.



(a) **(1,5)** Mostre que a corrente total que flui pelo fio é dada por

$$i_T = \frac{\alpha}{2}\left(b^4 - a^4\right)\pi + i_a$$

(b) **(1,5)** Calcule o campo magnético a uma distância s do eixo e fora do cabo coaxial, isto é, $s > b$.

Questão 03: Campo magnético produzido por solenoide longo

Um solenoide longo com raio R, eixo na direção z e n voltas por unidade de comprimento transporta uma corrente estacionária i. No seu interior, seu potencial vetor a uma distância s do eixo é dado por

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 i n}{2} s\,\hat{\phi}$$

Calcule o campo magnético no interior do solenoide:

(a) **(1,5)** Usando a lei de Ampère;

(b) **(1,5)** Usando a relação $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$.

Fórmulas que podem ser usadas nas questões da prova:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{C} = \frac{\partial C_x}{\partial x} + \frac{\partial C_y}{\partial y} + \frac{\partial C_z}{\partial z} \quad \text{(coordenadas cartesianas)}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{C} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 C_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(C_\theta \sin\theta\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial C_\phi}{\partial\phi} \quad \text{(coordenadas esféricas)}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{C} = \frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}\left(sC_s\right) + \frac{1}{s}\frac{\partial C_\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial C_z}{\partial z} \quad \text{(coordenadas cilíndricas)}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{C} = \left(\frac{\partial C_z}{\partial y} - \frac{\partial C_y}{\partial z}\right)\hat{x} + \left(\frac{\partial C_x}{\partial z} - \frac{\partial C_z}{\partial x}\right)\hat{y} + \left(\frac{\partial C_y}{\partial x} - \frac{\partial C_x}{\partial y}\right)\hat{z} \quad \text{(coordenadas cartesianas)}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{C} = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\left(C_\phi\sin\theta\right) - \frac{\partial C_\theta}{\partial\phi}\right)\hat{r} + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial C_r}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial r}\left(rC_\phi\right)\right)\hat{\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(rC_\theta\right) - \frac{\partial C_r}{\partial\theta}\right)\hat{\phi}$$

(coordenadas esféricas)

$$\vec{\nabla}\times\vec{C} = \left(\frac{1}{s}\frac{\partial C_z}{\partial\phi} - \frac{\partial C_\phi}{\partial z}\right)\hat{s} + \left(\frac{\partial C_s}{\partial z} - \frac{\partial C_z}{\partial s}\right)\hat{\phi} + \frac{1}{s}\left(\frac{\partial}{\partial s}\left(sC_\phi\right) - \frac{\partial C_s}{\partial\phi}\right)\hat{z} \quad \text{(coordenadas cilíndricas)}$$

$d\tau = dx\, dy\, dz$ (coordenadas cartesianas)
$d\tau = r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi$ (coordenadas esféricas)
$d\tau = sds\, d\phi\, dz$ (coordenadas cilíndricas)

GABARITO

1- $\vec{P} = \beta \vec{r}$

A) $\sigma_p = \vec{P} \cdot \hat{n} = \vec{P} \cdot \hat{r}$

$= \beta \vec{r} \cdot \hat{r} = \beta r \Big|_{r=a}$

$$\boxed{\sigma_p = \beta a}$$

B) $\rho_p = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$

$= -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \beta r\right)$

$\rho_p = -\frac{1}{r^2} \cdot \beta \cdot 3r^2$

$$\boxed{\rho_p = -3\beta}$$

c) q_s : CARGA SUPERFICIAL DE POLARIZAÇÃO.
q_v : CARGA VOLUMÉTRICA DE POLARIZAÇÃO.

$\sigma_p = \frac{q_s}{A} \Rightarrow q_s = \sigma_p A$

$q_s = \beta a \cdot 4\pi a^2 = 4\pi \beta a^3$

$\rho_p = \frac{q_v}{V} \Rightarrow q_v = \rho_p V$

$q_v = -3\beta \cdot \frac{4}{3}\pi a^3 = -4\pi \beta a^3$

$$\Rightarrow \boxed{q_s + q_v = 0}$$

2- $J = \alpha s^2 \quad (a < s < b)$

A) REGIÃO INTERNA:

$i = i_a$

REGIÃO ENTRE a E b:

$i_b = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{a}$

$i_b = \int_a^b \int_0^{2\pi} \alpha s^2 \, s \, ds \, d\phi$

$i_b = 2\pi \alpha \frac{s^4}{4} \Big|_a^b = \frac{\pi\alpha}{2}\left(b^4 - a^3\right) \Rightarrow$

$$\boxed{i_T = i_a + \frac{\pi\alpha}{2}\left(b^4 - a^4\right)}$$

B) $s > b$:

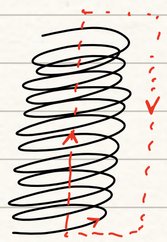
$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{int}$

$B \cdot 2\pi s = \mu_0 i_T$

$B = \frac{\mu_0 i_T}{2\pi s}$

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi s}\left[i_a + \frac{\pi\alpha}{2}\left(b^4 - a^4\right)\right]\hat{\phi}}$$

3- $\vec{A} = \frac{\mu_0 i n}{2} s \, \hat{\phi} \quad (s < R)$



A) $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{int}$

$B \cdot L + 0 = \mu_0 N i$

$$\boxed{\vec{B} = \mu_0 i n \, \hat{z}}$$

B) $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$

$\vec{A} = f(s)\, \hat{\phi} \Rightarrow$

$\vec{B} = \frac{1}{s}\left[\frac{\partial}{\partial s}\left(s A_\phi\right)\right]\hat{z}$

$\vec{B} = \frac{1}{s} \cdot \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\mu_0 i n}{2} s^2\right)\hat{z}$

$\vec{B} = \frac{\mu_0 i n}{2s} \cdot 2s \, \hat{z}$

$$\boxed{\vec{B} = \mu_0 i n \, \hat{z}}$$