Eletromagnetismo I - Prova 3

Prof. Marco Polo

09 de dezembro de 2024

Início: 14:00 - duração: 3:00 horas

Só serão consideradas as respostas que forem devidamente justificadas.

Não é permitido o uso de calculadoras.

Questão 01: Campo magnético em um meio linear

Uma corrente estacionária i passa por um fio de cobre longo de raio R de forma uniformemente distribuída por toda a seção transversal do fio. Considerando o cobre como um meio linear com susceptibilidade χ_m, faça o que se pede:

(a) **(1,0)** Calcule o módulo do campo magnético $\mathbf{B}$ dentro $(s < R)$ do fio.

(b) **(1,0)** Calcule o módulo do campo magnético $\mathbf{B}$ fora $(s > R)$ do fio.

(c) **(1,5)** Mostre que as correntes de magnetização são dadas por $\mathbf{K}_M = -\dfrac{\chi_m i}{2\pi R}\,\hat{z}$ e $\mathbf{J}_M = \dfrac{\chi_m i}{\pi R^2}\,\hat{z}$

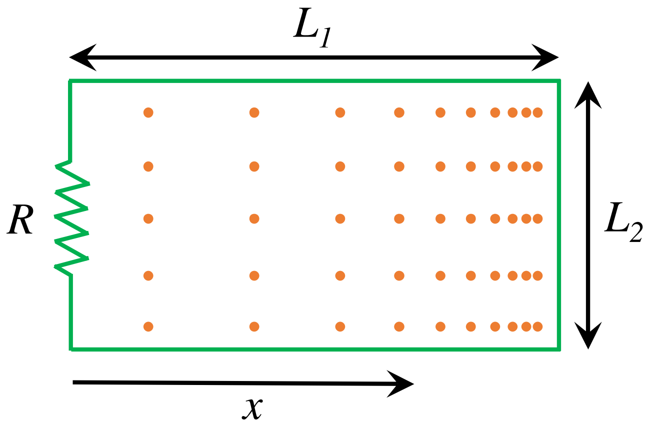
(d) **(0,5)** Mostre que a corrente de magnetização total vale zero.

Questão 02: Corrente induzida

Um campo magnético não uniforme atravessa uma espira retangular de resistência R de dimensões L_1 e L_2, como mostrado na figura. Além disso, a intensidade do campo magnético fica cada vez mais forte ao longo do tempo, seguindo a relação

$$B(x,t) = \alpha B_0 x^2 t^3,$$

onde α é uma constante.

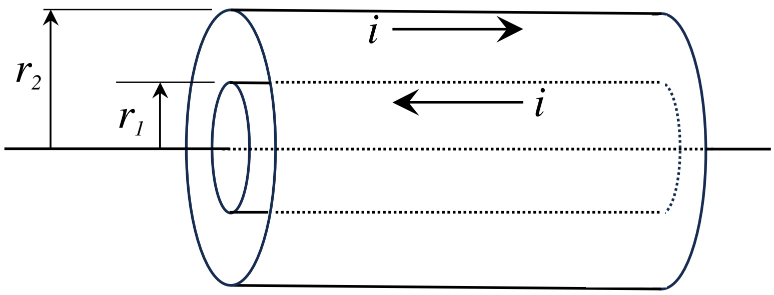


(a) **(1,5)** Calcule o fluxo magnético através da espira no instante $t = 2$.

(b) **(1,5)** Encontre o valor absoluto da corrente induzida na espira devido à variação do fluxo magnético no instante $t = 2$.

Questão 03: Energia armazenada no campo magnético

Um cabo coaxial, composto por duas cascas cilíndricas longas de raios r_1 e r_2 que compartilham o mesmo eixo, transporta corrente i em sentidos opostos, como mostrado na figura.



(a) **(1,5)** Usando a lei de Ampère, encontre o módulo do campo magnético nas três regiões: (i) dentro do cilindro interno, (ii) entre os cilindros, a uma distância s do eixo, e (iii) fora do cilindro externo, a uma distância s do eixo.

(b) **(1,5)** Usando o resultado do item (a), calcule a energia magnética armazenada em um trecho de comprimento L.

Fórmulas que podem ser usadas nas questões da prova:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{C} = \frac{\partial C_x}{\partial x} + \frac{\partial C_y}{\partial y} + \frac{\partial C_z}{\partial z} \quad \text{(coordenadas cartesianas)}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{C} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 C_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(C_\theta \sin\theta\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial C_\phi}{\partial\phi} \quad \text{(coordenadas esféricas)}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{C} = \frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}\left(sC_s\right) + \frac{1}{s}\frac{\partial C_\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial C_z}{\partial z} \quad \text{(coordenadas cilíndricas)}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{C} = \left(\frac{\partial C_z}{\partial y} - \frac{\partial C_y}{\partial z}\right)\hat{x} + \left(\frac{\partial C_x}{\partial z} - \frac{\partial C_z}{\partial x}\right)\hat{y} + \left(\frac{\partial C_y}{\partial x} - \frac{\partial C_x}{\partial y}\right)\hat{z} \quad \text{(coordenadas cartesianas)}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{C} = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\left(C_\phi\sin\theta\right) - \frac{\partial C_\theta}{\partial\phi}\right)\hat{r} + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial C_r}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial r}\left(rC_\phi\right)\right)\hat{\theta} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(rC_\theta\right) - \frac{\partial C_r}{\partial\theta}\right)\hat{\phi}$$

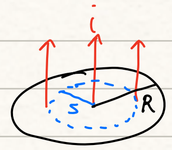
(coordenadas esféricas)

$$\vec{\nabla} \times \vec{C} = \left(\frac{1}{s}\frac{\partial C_z}{\partial\phi} - \frac{\partial C_\phi}{\partial z}\right)\hat{s} + \left(\frac{\partial C_s}{\partial z} - \frac{\partial C_z}{\partial s}\right)\hat{\phi} + \frac{1}{s}\left(\frac{\partial}{\partial s}\left(sC_\phi\right) - \frac{\partial C_s}{\partial\phi}\right)\hat{z} \quad \text{(coordenadas cilíndricas)}$$

$d\tau = dx\, dy\, dz$ (coordenadas cartesianas)
$d\tau = r^2\sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi$ (coordenadas esféricas)
$d\tau = sds\, d\phi\, dz$ (coordenadas cilíndricas)

GABARITO

1 - A)



$$\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{l} = i_{env}$$

CÁLCULO DA i_{env}:

$$\frac{i}{\pi R^2} = \frac{i_{env}}{\pi s^2}$$

$$\Rightarrow \quad i_{env} = \frac{s^2}{R^2} i$$

$$\Rightarrow \quad H \cdot 2\pi \cancel{s} = \frac{s^{\cancel{2}}}{R^2} i$$

$$H = \frac{i s}{2\pi R^2}$$

MAS $\quad \vec{B} = \mu \vec{H}$

$$\mu = \mu_0 (1 + \chi_m) \Rightarrow$$

$$\boxed{B = \frac{\mu_0 i (1+\chi_m) s}{2\pi R^2}}$$

B)
$$\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{enc}$$

$$B \cdot 2\pi s = \mu_0 i$$

$$\boxed{B = \frac{\mu_0 i}{2\pi s}}$$

c)
$$\vec{K}_M = \vec{M} \times \hat{n}$$

MAS $\quad \vec{M} = \chi_m \vec{H}$

$$\vec{M} = \frac{i \chi_m s}{2\pi R^2} \hat{\phi}$$

$$\hat{n} = \hat{s} \quad \text{E} \quad s = R \Rightarrow$$

$$\vec{K}_M = \frac{i \chi_m \cancel{R}}{2\pi R^{\cancel{2}}} \hat{\phi} \times \hat{s}$$

$$(s, \phi, z) \Rightarrow \quad \hat{\phi} \times \hat{s} = -\hat{z} \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{K}_M = -\frac{i \chi_m}{2\pi R} \hat{z}}$$

$$\vec{J}_M = \vec{\nabla} \times \vec{M} \quad ; \quad \vec{M} = f(s) \hat{\phi} \Rightarrow$$

$$\vec{J}_M = \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \left(s \frac{i \chi_m s}{2\pi R^2} \right) \hat{z}$$

$$\vec{J}_M = \frac{1}{\cancel{s}} \cdot \frac{i \chi_m}{2\pi R^2} \cdot 2\cancel{s} \; \hat{z}$$

$$\boxed{\vec{J}_M = \frac{i \chi_m}{\pi R^2} \hat{z}}$$

D)
$$i_v = \int \vec{J} \cdot d\vec{a}$$

$$i_v = \frac{i \chi_m}{\pi R^2} \cdot \pi R^2$$

$$i_v = i \chi_m .$$

$$i_s = \int \vec{K} \cdot d\vec{l}_\perp$$

$$i_s = -\frac{i \chi_m}{2\pi R} \cdot 2\pi R$$

$$i_s = -i \chi_m \Rightarrow$$

$$\boxed{i_v + i_s = 0}$$

2 - A) $\quad B(x,t) = \alpha B_0 x^2 t^3$

$$\phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{a}$$

$$= \alpha B_0 t^3 \int x^2 \, dx \, dy$$

$$= \alpha B_0 t^3 \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^{L_1} \left. y \right|_0^{L_2}$$

$$\phi_B(t) = \frac{\alpha B_0 t^3}{3} \cdot L_1^3 L_2 \Rightarrow$$

$$\boxed{\phi_B(t=2) = \frac{8 \alpha B_0 L_1^3 L_2}{3}}$$

B)
$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi_B}{dt}$$

$$\mathcal{E} = -\frac{d}{dt} \left(\frac{\alpha B_0 t^3 L_1^3 L_2}{3} \right)$$

$$|\mathcal{E}| = \alpha B_0 L_1^3 L_2 t^2$$

$$|\mathcal{E}(t=2)| = 4 \alpha B_0 L_1^3 L_2$$

MAS $\quad \mathcal{E} = i R \Rightarrow$

$$\boxed{i_{IND} = \frac{4 \alpha B_0 L_1^3 L_2}{R}}$$

3- A)

$s < r_1$:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{enc} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{B_i = 0}$$

$r_1 < s < r_2$:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{enc}$$

$$B . 2\pi s = \mu_0 i$$

$$\Rightarrow \boxed{B_{ii} = \frac{\mu_0 i}{2\pi s}}$$

$s > r_2$:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{enc} = \mu_0 (i - i) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{B_{iii} = 0}$$

B) $$W_B = \frac{1}{2\mu_0} \int B^2 \, d\tau$$

$$= \frac{1}{2\cancel{\mu_0}} \int_{r_1}^{r_2} \int_0^{2\pi} \int_0^L \frac{\mu_0^{\cancel{2}} i^2}{4\pi^2 s^2} \, s \, ds \, d\phi \, dz$$

$$= \frac{\mu_0 i^2}{8\pi^2} \ln s \Big|_{r_1}^{r_2} . \, 2\pi . \, L$$

$$\boxed{W_B = \frac{\mu_0 i^2 L \ln(r_2/r_1)}{4\pi}}$$