Eletromagnetismo II
Lista de Problemas 3.1

Departamento de Física de Ji-Paraná
Universidade Federal de Rondônia
Prof. Marco Polo

Questão 01

Verifique se os potenciais retardados de um dipolo oscilante,

$$V(r,\theta,t) = \frac{p_0 \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r}\left\{-\frac{\omega}{c}\sin\left[\omega(t-r/c)\right] + \frac{1}{r}\cos\left[\omega(t-r/c)\right]\right\}$$

$$\mathbf{A}(r,\theta,t) = -\frac{\mu_0 p_0 \omega}{4\pi r}\sin\left[\omega(t-r/c)\right]\hat{\mathbf{z}},$$

satisfazem a condição de calibre de Lorentz. Não use a aproximação $r \gg \frac{c}{\omega}$.

Questão 02

Encontre a **resistência de radiação** do fio que junta as duas extremidades do dipolo. (Essa é a resistência que teria a mesma perda média de potência – para o calor – que o dipolo *de fato* emite na forma de radiação.) Mostre que $R = 790(d/\lambda)^2\Omega$, onde λ é o comprimento de onda da radiação. No caso dos fios de um rádio comum (de, digamos, $d = 5$ cm), você deve se preocupar com a contribuição radiativa para a resistência total?

Questão 03

Encontre os campos elétrico e magnético de um dipolo magnético oscilante *sem* usar a aproximação $r \gg \frac{c}{\omega}$. Encontre o vetor de Poynting e mostre que a intensidade da radiação é exatamente a mesma que obtivemos usando essa aproximação.

Questão 04

Encontre a resistência de radiação (ver Problema 02) para o dipolo magnético oscilante da figura abaixo. Expresse sua resposta em termo de λ e b, e compare à resistência de radiação do dipolo *elétrico*.

Questão 05

Um anel circular isolante (de raio b) está no plano xy, centrado na origem. Ele possui uma densidade linear de carga $\lambda = \lambda_0 \sin\phi$, onde λ_0 é constante e ϕ é o ângulo azimutal usual. O anel é agora colocado para girar a uma velocidade angular estacionária ω em torno do eixo z. Calcule a potência radiada.

Questão 06

Um elétron sai do repouso e cai sob a influência da gravidade. No primeiro centímetro, que fração da energia potencial perdida é radiada?

Questão 07

Como modelo de radiação quadrupolar elétrica, considere dois dipolos elétricos oscilantes com orientações opostas, separados por uma distância d, como mostra a figura. Use os resultados da Seção 11.1.2 do Griffths para os potenciais de cada dipolo, mas observe que eles *não* estão localizados na origem. Mantendo somente os termos de primeira ordem em d:

(a) Encontre os potenciais escalar e vetorial.

(b) Encontre os campos magnético e elétrico.

(c) Encontre o vetor de Poynting e a potência radiada. Faça o gráfico do perfil de intensidade como função de θ.

Questão 08

Uma corrente $i(t)$ flui em torno do anel circular da figura abaixo. Deduza a fórmula geral para a potência radiada, expressando sua resposta em termos do momento de dipolo magnético $m(t)$ da espira.

Questão 09

Suponha que um elétron desacelera a uma taxa constante a de uma velocidade inicial v_0 até chegar a zero. Que fração de sua energia cinética inicial se perde para a radiação? (O restante é absorvido pelo mecanismo, seja qual ele for, que mantém a aceleração constante.) Assuma que $v_0 \ll c$ de forma que a fórmula de Larmor possa ser usada.

Questão 10

Na teoria de Bohr sobre o hidrogênio, o elétron no seu estado fundamental deveria supostamente viajar em um círculo de raio 5×10^{-11} m, mantido em órbita pela atração Coulombiana no próton. Segundo a eletrodinâmica clássica, esse elétron deve radiar e, portanto, espiralar para dentro do núcleo. Mostre que $v \ll c$ para a maior parte da viagem (para que você possa usar a fórmula de Larmor), e calcule o tempo de vida do átomo de Bohr. (Assuma que cada revolução é essencialmente circular.)

Questão 11

Uma partícula de carga q move-se em um círculo de raio R a uma velocidade constante v. Para manter o movimento, você precisa, é claro, de uma força centrípeta mv^2/R; que força *adicional* $\mathbf{F}_e$ você precisa exercer para neutralizar a reação de radiação? [É mais fácil expressar a resposta em termos da velocidade momentânea $\mathbf{v}$.] Que potência (P_e) essa força extra exerce? Compare P_e com a potência radiada (use a fórmula de Larmor).

Questão 12

Com a inclusão da força de reação de radiação,

$$ddd$$

a segunda lei de Newton para uma partícula carregada torna-se

$$a = \tau \dot{a} + \frac{F}{m},$$

onde F é a força externa agindo sobre a partícula.

(a) Em contraste com o caso de uma partícula *não carregada* ($a = F/m$), a aceleração (como a posição e a velocidade) deve ser agora uma função *contínua* do tempo, mesmo que a força mude abruptamente. (Fisicamente, a reação de radiação amortece qualquer alteração rápida em a.) *Prove* que a é contínuo em qualquer tempo t, integrando a equação do movimento acima de $(t-\epsilon)$ até $(t+\epsilon)$ e tomando o limite $\epsilon \to 0$.

(b) Uma partícula está sujeita a uma força constante F, que começa no tempo $t=0$ e dura até o tempo T. Encontre a solução mais geral $a(t)$ para a equação de movimento em cada um dos três períodos: (i) $t<0$; (ii) $0<t<T$; (iii) $t>T$.

(c) Imponha a condição de continuidade (a) em $t=0$ e $t=T$. Mostre que você pode diminuir a divergência exponencial da região (iii) *ou* evitar a pré-aceleração na região (i), *mas não ambos*.

(d) Se revolver eliminar a divergência exponencial, qual é a aceleração como função temporal, em cada intervalo? E quanto à velocidade? (Esta deve, é claro, ser contínua em $t=0$ e $t=T$.) Assuma que a partícula estava originalmente em repouso: $v(-\infty)=0$.

(e) Desenhe o gráfico de $a(t)$ e $v(t)$, tanto para uma partícula *sem carga* quanto para uma partícula com carga (sem divergência exponencial) sujeitas a essa força.

Respostas

Questão 1

Sim.

Questão 3

$$\mathbf{E} = \frac{\mu_0 m_0 \sin\theta}{4\pi r}\left\{\frac{\omega^2}{c}\cos[\omega(t-r/c)] + \frac{\omega}{r}\sin[\omega(t-r/c)]\right\}\hat{\phi}$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 m_0 \cos\theta}{2\pi r^2}\left\{\frac{1}{r}\cos[\omega(t-r/c)] - \frac{\omega}{c}\sin[\omega(t-r/c)]\right\}\hat{\mathbf{r}} + \\ + \frac{\mu_0 m_0 \sin\theta}{4\pi r}\left\{\left(\frac{1}{r^2}-\frac{\omega^2}{c^2}\right)\cos[\omega(t-r/c)] - \frac{\omega}{rc}\sin[\omega(t-r/c)]\right\}\hat{\theta}$$

$$\langle \mathbf{S}\rangle = \frac{\mu_0 m_0^2 \omega^4 \sin^2\theta}{32\pi^2 c^3 r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

Questão 4

$3\times 10^5 (b/\lambda)^4 \Omega$

Questão 5

$$P = \frac{\mu_0 \pi \lambda_0^2 \omega^4 b^4}{6c}$$

Questão 6

$2,76 \times 10^{-22}$

Questão 7

(a) $V = -\dfrac{\mu_0 p_0 \omega^2 d}{4\pi r} \cos^2\theta \cos[\omega(t - r/c)]$
$\mathbf{A} \approx \dfrac{\mu_0 p_0 \omega^2 d}{4\pi r c} \cos\theta \cos[\omega(t - r/c)]\hat{\mathbf{z}}$
(b) xxxxx
(c) yyyy
$\langle P \rangle = \dfrac{\mu_0 p_0^2 d^2 \omega^6}{60\pi c^3}$

Questão 8

$P = \dfrac{\mu_0 \ddot{m}^2}{6\pi c^3}$

Questão 9

$\dfrac{\mu_0 q^2 a}{3\pi m c v_0}$

Questão 10

13,1 ps

Questão 11

$\mathbf{F}_e = \dfrac{\mu_0 q^2 v^2}{6\pi c R^2}\mathbf{v} \qquad P_e = \dfrac{\mu_0 q^2 v^4}{6\pi c R^2}$

Questão 12

(b) $a(t) = a_0 e^{t/\tau}, t < 0 \quad a(t) = a_1 e^{t/\tau} + F/m, 0 < t < T \quad a(t) = a_2 e^{t/\tau}, t > T.$
(d) $a(t) = F/m(1 - e^{-T/\tau})e^{t/\tau}, t < 0 \quad a(t) = F/m(1 - e^{-(t-T)/\tau}), 0 < t < T \quad a(t) = 0, t > T$
$v(t) = F\tau/m(1 - e^{-T/\tau})e^{t/\tau}, t < 0 \quad v(t) = F/m(t - \tau e^{-(t-T)/\tau}) + F\tau/m, 0 < t < T \quad v(t) = FT/m, t > T$