



Eletromagnetismo II - Prova 1

Prof. Marco Polo

24 de março de 2025

Início: 14:00 - duração: 3:00 horas

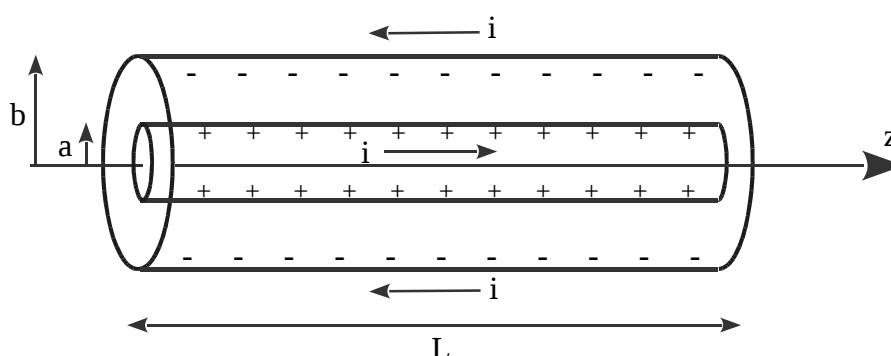


Só serão consideradas as respostas que forem devidamente justificadas.

Não é permitido o uso de calculadoras.

Questão 01: Momento eletromagnético

Um longo cabo coaxial de comprimento L consiste de um condutor interno de raio a e de um condutor externo de raio b . Ambos os condutores podem ser considerados como cascas cilíndricas. O condutor interno tem uma distribuição de carga uniforme por unidade de comprimento λ , e uma corrente estacionária i para a direita; o condutor externo tem a carga e a corrente opostas, e com mesmos valores absolutos.



- (1,0) Calcule o campo elétrico nas três regiões de interesse: dentro do condutor interno, entre os condutores e fora do condutor externo.
- (1,0) Calcule o campo magnético nas mesmas regiões.
- (1,0) Calcule o momento linear armazenado nos campos eletromagnéticos.

Questão 02: Ondas eletromagnéticas

Considere uma onda eletromagnética plana e monocromática viajando no vácuo sentido positivo do eixo x . Ela possui um campo elétrico com amplitude E_0 , oscila na direção y com frequência angular ω e possui constante de fase δ .

- (1,0) Escreva a equação para o vetor campo elétrico da onda.
- (1,0) Escreva a equação para o vetor campo magnético da onda.
- (1,0) Faça um esboço, no plano cartesiano, da onda eletromagnética se propagando no eixo x . Deixe claro, no esboço, os campos elétricos e magnéticos da onda.
- (1,0) Calcule o vetor de Poynting dessa onda eletromagnética e explique o que seu significado.
- (1,0) Mostre que o momento linear transportado por essa onda eletromagnética em uma certa região do espaço com volume V é dado por

$$\vec{p}_{em} = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{c} \int_V \cos^2(\omega x/c - \omega t + \phi) d\tau \hat{x}$$

Questão 03: (2,0) Equação da onda

Mostre que a onda eletromagnética

$$\vec{E} = E_0 \cos(ky - \omega t + \phi) \hat{z}$$

é solução da equação da onda

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2},$$

onde $k = \frac{\omega}{c}$ e $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$.

GABARITO

1-A) $s < a$: $\boxed{E = 0}$

B) $s < a$: $\boxed{\vec{B} = 0}$

$a < s < b$:

$$\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{a} = q_{in}/\epsilon_0$$

$$E \cdot 2\pi s L = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 s} \hat{s}}$$

$a < s < b$:

$$\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{enc}$$

$$B \cdot 2\pi s = \mu_0 i$$

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi s} \hat{\phi}}$$

$s > b$: $\boxed{\vec{B} = 0}$

$s > b$: $\boxed{\vec{E} = 0}$

c) $\vec{\phi}_{EM} = \mu_0 \epsilon_0 \vec{S}$

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$$

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 s} \frac{\mu_0 i}{2\pi s} \hat{s} \times \hat{\phi}$$

$(s, \phi, z) \Rightarrow$

$$\vec{S} = \frac{\lambda i}{4\pi^2 \epsilon_0 s^2} \hat{z}$$

$$\vec{\phi}_{EM} = \frac{\mu_0 \lambda i}{4\pi^2 s^2} \hat{z}$$

$$\phi_{EM} = \frac{d\vec{P}}{d\tau} \Rightarrow$$

$$\vec{P}_{EM} = \int \vec{\phi}_{EM} d\tau$$

$$\vec{P}_{EM} = \int \frac{\mu_0 \lambda i}{4\pi^2 s^2} s ds d\phi dz \hat{z}$$

$$= \frac{\mu_0 \lambda i}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^L dz \int_a^b \frac{ds}{s} \hat{z}$$

$$\vec{P}_{EM} = \frac{\mu_0 \lambda i}{4\pi^2} \cdot 2\pi \cdot L \cdot \ln(b/a) \hat{z}$$

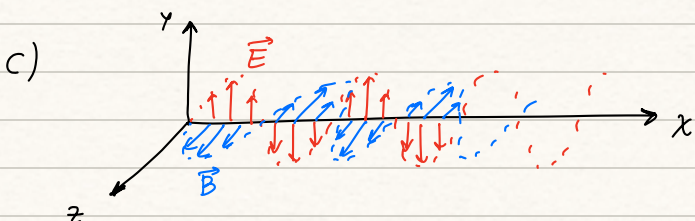
$$\boxed{\vec{P}_{EM} = \frac{\mu_0 \lambda i L}{2\pi} \ln(b/a) \hat{z}}$$

2-A) $\vec{E}(x,t) = E_0 \cos(kx - \omega t + s) \hat{y}$
 $k = \omega/c \Rightarrow$

$$\boxed{\vec{E}(x,t) = E_0 \cos(\omega x/c - \omega t + s) \hat{y}}$$

B) $\boxed{\vec{B}(x,t) = \frac{E_0}{c} \cos(\omega x/c - \omega t + s) \hat{z}}$

(x, y, z)



D) $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \frac{E_0^2}{c} \cos^2(\omega x/c - \omega t + s) \hat{y} \times \hat{z}$$

$$\boxed{\vec{S} = \frac{1}{\mu_0 c} E_0^2 \cos^2(\omega x/c - \omega t + s) \hat{x}}$$

$\hookrightarrow$ POTÊNCIA / UNIDADE DE ÁREA AO LONGO DE x ,
 EM FUNÇÃO DE x E DE t ,
 TRANSPORTADA PELA ONDA.

$$E) \quad \vec{\phi}_{em} = \mu_0 \epsilon_0 \vec{S}$$

$$\vec{\phi}_{em} = \frac{\mu_0 \epsilon_0 E_0^2}{\mu_0 c} \cos^2(\omega x/c - \omega t + \phi) \hat{x}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{P}_{em} = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{c} \int_V \cos^2(\omega x/c - \omega t + \phi) d\tau \hat{x}}$$

$$3 - \vec{E} = E_0 \cos(ky - \omega t + \phi) \hat{z}$$

$$\nabla^2 \vec{E} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \vec{E}$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[E_0 \cos(ky - \omega t + \phi) \hat{z} \right]$$

$$= E_0 (-k^2) \cos(ky - \omega t + \phi) \hat{z}$$

$$= -k^2 E_0 \cos(ky - \omega t + \phi) \hat{z}$$

$$\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[E_0 \cos(ky - \omega t + \phi) \hat{z} \right]$$

$$= \mu_0 \epsilon_0 E_0 (-\omega^2) \cos(ky - \omega t + \phi) \hat{z}$$

$$= -\mu_0 \epsilon_0 \omega^2 E_0 \cos(ky - \omega t + \phi) \hat{z}$$

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} = \mu_0 \epsilon_0 \omega^2 \Rightarrow$$

$$\nabla^2 \vec{E} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$