



Eletromagnetismo II - Prova 2

Prof. Marco Polo

05 de maio de 2025

Início: 14:00 - duração: 3:00 horas



Só serão consideradas as respostas que forem devidamente justificadas.

Não é permitido o uso de calculadoras.

Questão 01: Guia de onda retangular

Em aula, vimos que, na propagação de ondas TE por uma guia de onda de formato retangular, com altura a e largura b , o número de onda da onda propagante com frequência ω deve satisfazer a equação

$$k = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \pi^2 \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right)},$$

onde $m, n = 0, 1, 2, 3, \dots$ e c é a velocidade da luz no vácuo.

- (a) (1,5) Se $a > b$, mostre que a frequência mais baixa no qual é possível haver a propagação da onda no guia, chamada frequência de corte, é dada por

$$\omega_c = \frac{\pi c}{a}.$$

- (b) (1,5) Mostre que, quando a frequência da onda vale $\omega = 2\pi c/a$, a velocidade de fase do modo TE₁₀ ($n = 1, m = 0$) vale

$$v = \frac{2c}{\sqrt{3}}.$$

Faça um comentário à respeito desse resultado.

Questão 02: Potenciais de uma onda eletromagnética

Considere uma onda eletromagnética onde $V = 0$ e

$$\vec{A} = C_1 \sin(kx - \omega t) \hat{y} + C_2 \cos(kx - \omega t) \hat{z},$$

no qual C_1, C_2, ω e k são constantes.

- (a) (1,5) Mostre que o campo elétrico vale

$$\vec{E} = C_1 \omega \cos(kx - \omega t) \hat{y} - C_2 \omega \sin(kx - \omega t) \hat{z}$$

- (b) (1,5) Encontre o campo elétrico $\vec{B}$.

- (c) (1,0) Faça um comentário sobre como essa onda se propaga, e também como está sua polarização.

Questão 03: (3,0) Potencial de uma corrente não estacionária

Suponha que por um fio reto infinito passa uma corrente que aumenta linearmente com o tempo:

$$i(t) = kt, \quad \text{para } t > 0.$$

Mostre que o potencial vetor a uma distância s do fio e no instante t presente vale

$$\vec{A}(s, t) = \frac{\mu_0 k}{2\pi} \left[t \ln \left(\frac{ct + \sqrt{c^2 t^2 - s^2}}{s} \right) - \frac{\sqrt{c^2 t^2 - s^2}}{c} \right] \hat{z}.$$

Quanto vale $\vec{A}$ em s e no instante $t = \frac{s}{2c}$? *Comente.*

Dado:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$$

61 BARITO

$$1- \quad k = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right)}$$

A) PARA PROPAGAÇÃO, $k \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$$\omega^2 > c^2 \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right)$$

$$\text{Se } m=1 \text{ e } m=0 \Rightarrow$$

$$\boxed{\omega > \frac{\pi c}{a}}$$

$$B) \quad v = \frac{\omega}{k} \Rightarrow$$

$$v = \frac{2\pi c}{ka}$$

$$\text{MAS } k = \sqrt{\frac{4\pi^2 c^2}{c^2 a^2} - \frac{\pi^2}{a^2}}$$

$$k = \frac{\pi \sqrt{3}}{a} \Rightarrow$$

$$v = \frac{2\cancel{\pi}c}{\cancel{a}} \cdot \frac{\cancel{a}}{\cancel{\pi}\sqrt{3}}$$

$$\boxed{v = \frac{2c}{\sqrt{3}}} \quad \begin{array}{l} v > c \text{ (VELOCIDADE DE FASE),} \\ \text{MAS } v_g \text{ (VELOCIDADE DE GRUPO)} \\ \text{TEM QUE SER } < c. \end{array}$$

$$2- \quad \vec{A} = C_1 \sin(kx - \omega t) \hat{y} + C_2 \cos(kx - \omega t) \hat{z}$$

$$v = 0$$

$$A) \quad \vec{E} = -\vec{\nabla} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\vec{E} = -C_1 (-\omega) \cos(kx - \omega t) \hat{y} - C_2 (-\omega) [-\sin(kx - \omega t) \hat{z}]$$

$$\boxed{\vec{E} = \omega C_1 \cos(kx - \omega t) \hat{y} - \omega C_2 \sin(kx - \omega t) \hat{z}}$$

$$B) \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

$$\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & C_1 \sin(kx - \omega t) & C_2 \cos(kx - \omega t) \end{vmatrix}$$

$$\vec{B} = K C_2 \sin(kx - \omega t) \hat{y} + K C_1 \cos(kx - \omega t) \hat{z}$$

c) Sua propagação corresponde a uma polarização ELÍPTICA, QUE GIRA NO PLANO yz ENQUANTO A ONDA SE PROPAGA.

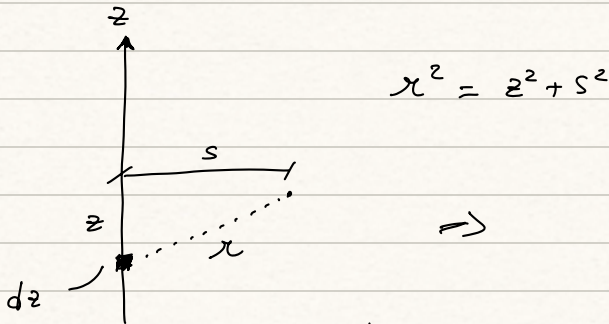
3- $i(t) = kt, \quad t > 0.$

a) $\vec{E} = -\vec{\nabla}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

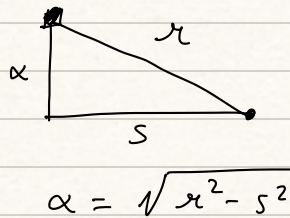
$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}', t_1)}{r} d\tau' \quad t_1 = t - \frac{r}{c}$$

em 1D,

$$\vec{A}(s, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{i(t_1) dz}{r} \hat{z}$$



$$\begin{aligned} \vec{A}(s, t) &= \frac{\mu_0 k}{4\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{t_1 dz}{\sqrt{z^2 + s^2}} \hat{z} \\ &= \frac{\mu_0 k \hat{z}}{2\pi} \int_0^{\alpha} \frac{t_1 dz}{\sqrt{z^2 + s^2}} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} c &= \frac{r}{t} \Rightarrow r = ct \Rightarrow \\ \alpha &= \sqrt{c^2 t^2 - s^2} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{A}(s, t) &= \frac{\mu_0 k \hat{z}}{2\pi} \int_0^{\alpha} \left(t - \frac{\sqrt{z^2 + s^2}}{c} \right) \frac{dz}{\sqrt{z^2 + s^2}} \\ &= \frac{\mu_0 k}{2\pi} \hat{z} \left[t \int_0^{\alpha} \frac{dz}{\sqrt{z^2 + s^2}} - \frac{1}{c} \int_0^{\alpha} dz \right] \\ &= \frac{\mu_0 k}{2\pi} \hat{z} \left[t \ln(z + \sqrt{z^2 + s^2}) \Big|_0^{\alpha} - \frac{\alpha}{c} \right] \end{aligned}$$

$$\vec{A}(s, t) = \frac{\mu_0 K}{2\pi} \hat{z} \left[t \ln \left(\frac{\sqrt{c^2 + t^2 - s^2} + ct}{s} \right) - \sqrt{\frac{c^2 + t^2 - s^2}{c}} \right]$$