Física Matemática
Lista de Problemas 3.2

Departamento de Física de Ji-Paraná
Universidade Federal de Rondônia
Prof. Marco Polo

Questão 01: Condutividade térmica

Para um sólido esférico homogêneo com difusibilidade térmica constante K, e nenhuma fonte de calor, a equação de condução de calor se torna

$$\frac{\partial T(r,t)}{\partial t} = K\nabla^2 T(r,t).$$

Admita uma solução da forma

$$T = R(r)T(t)$$

e separe as variáveis. Mostre que a equação radial pode assumir a forma padrão

$$r^2\frac{d^2R}{dr^2} + 2r\frac{dR}{dr} + \left[\alpha^2 r^2 - n(n+1)\right] R = 0, \quad n \text{inteiro}.$$

As soluções dessa equação são denominadas funções esféricas de Bessel.

Questão 02: Mecânica Quântica

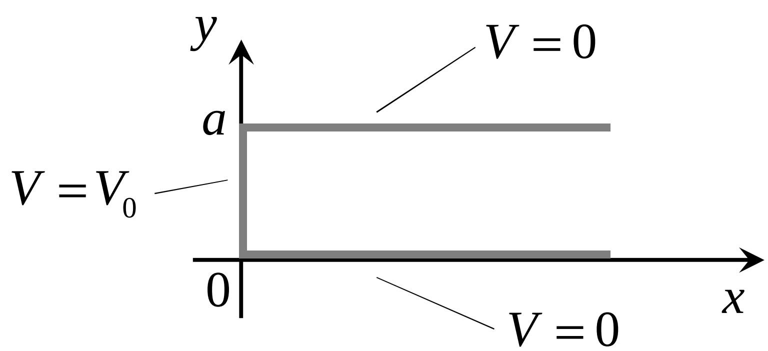
Uma partícula atômica (na Mecânica Quântica) está confinada dentro de uma caixa retangular de lados a, b e c. A partícula é descrita por uma função de onda ψ que satisfaz a equação de onda de Schroedinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi = E\psi.$$

A função de onda deve se anular em cada superfície da caixa (mas não para ser identicamente zero). Essa condição impõe restrições às constantes de separação e, portanto, à energia E. Qual é o menor valor de E para o qual tal solução pode ser obtida?

Questão 03: Eletromagnetismo - coordenadas cartesianas

Duas placas metálicas aterradas (isto é, com potencial $V = 0$), infinitamente grandes, estão localizadas no plano xz, uma em $y = 0$ e a outra em $y = a$ (ver figura, considerando que o eixo z está apontado para fora do papel). A extremidade esquerda, em $x = 0$, está fechada com uma placa feita de material isolante, e mantida em um potencial constante V_0. O potencial, naturalmente, deve satisfazer a equação de Laplace $\nabla^2 V = 0$.



(a) Usando a técnica de separação de variáveis na equação de Laplace, mostre que as equações para as funções que dependem de x e de y são dadas por

$$\begin{aligned} \frac{d^2X}{dx^2} &= k^2 X \\ \frac{d^2Y}{dy^2} &= -k^2 Y, \end{aligned}$$

onde k^2 foi a escolha para a constante de separação.

(b) A partir da solução das equações acima, mostre que o potencial V pode ser escrito como

$$V(x, y) = \left(Ae^{kx} + Be^{-kx}\right)(C \sin ky + D \cos ky)$$

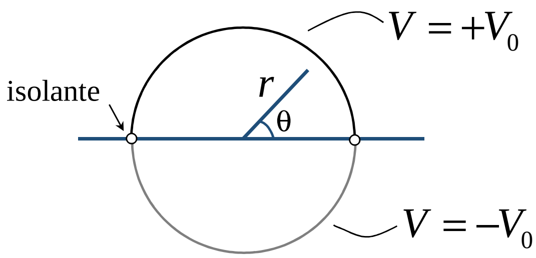
(c) Mediante o uso das condições de contorno, mostre que a solução do problema em questão é dado por

$$V(x, y) = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\ldots} \frac{1}{n} e^{-n\pi x/a} \sin n\pi y/a$$

Questão 04: Eletromagnetismo - coordenadas cilíndricas

Uma casca cilíndrica metálica de comprimento muito longo, de raio a, está dividida em duas partes iguais e isoladas eletricamente uma da outra. Uma das metades do cilindro é mantida em um potencial elétrico constante $+V_0$ e a outra em $-V_0$, conforme mostra a figura. O potencial, naturalmente, deve satisfazer a equação de Laplace $\nabla^2 V = 0$. O laplaciano em coordenadas cilíndricas é dado por

$$\nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$



(a) Usando a técnica de separação de variáveis na equação de Laplace, e considerando que o problema possui simetria azimutal, mostre que as equações radial e polar são dadas por

$$\begin{aligned} \frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr} - \frac{m^2}{r^2}R &= 0 \\ \frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + m^2\Theta &= 0, \end{aligned}$$

onde m^2 é a constante de separação.

(b) Mostre que a periodicidade do potencial V em relação a θ implica que m deve ser um inteiro, isto é, $m = 0, 1, 2, 3, \ldots$

(c) Usando o método de Frobenius, mostre que a solução geral da equação radial é dada por

$$R(r) = Ar^m + Br^{-m}$$

(d) Mostre que a solução geral da equação polar é dada por é dada por

$$\Theta(\theta) = C\cos m\theta + D\sin m\theta,$$

de forma que a solução geral da equação de Laplace em coordenadas cilíndricas, com simetria azimutal, é dada por

$$V(r,\theta) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(A_m r^m + B_m r^{-m}\right)\left(C_m \cos m\theta + D_m \sin m\theta\right)$$

(e) Usando as condições de contorno do problema e a equação acima, mostre que a solução final do problema é dada por

$$V(r,\theta) = \frac{4V}{\pi} \sum_{m=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{1}{m}\left(\frac{r}{a}\right)^m \sin m\theta$$

Respostas

Questão 2

$$E = \frac{\pi^2\hbar^2}{2m}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)$$