Mecânica Quântica
Lista de Problemas 2.3

Departamento de Física de Ji-Paraná
Universidade Federal de Rondônia
Prof. Marco Polo

Questão 01:

Verifique que $H_3(x)$ e $H_4(x)$ satisfazem a relação de recursão

$$C_{n+2} = \frac{2n+1-2\epsilon}{(n+2)(n+1)} C_n$$

Questão 02:

Mostre que

$$\begin{aligned}
\langle n'| X |n\rangle &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left[\delta_{n',n+1}(n+1)^{1/2} + \delta_{n',n-1} n^{1/2}\right] \\
\langle n'| P |n\rangle &= \sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}} i \left[\delta_{n',n+1}(n+1)^{1/2} - \delta_{n',n-1} n^{1/2}\right],
\end{aligned}$$

onde $|n\rangle$ e $|n'\rangle$ são autoestados do hamiltoniano. Use a relação de recursão

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n - 2nH_{n-1}$$

dos polinômios de Hermite e a constante de normalização das autofunções de onda do oscilador harmônico quântico,

$$A_n = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar 2^{2n}(n!)^2}\right)^{1/4}$$

Questão 03:

Mostre que, para o primeiro estado excitado do oscilador harmônico quântico, $\Delta X \Delta P = \frac{3\hbar}{2}$.

Questão 04:

Mostre que a função de onda do estado fundamental do oscilador harmônico quântico na representação P é dada por

$$\psi_0(p) = \left(\frac{1}{m\pi\hbar\omega}\right)^{1/4} e^{-p^2/(2m\hbar\omega)}$$

Questão 05:

Encontre $\langle X \rangle$, $\langle P \rangle$, $\langle X^2 \rangle$, $\langle P^2 \rangle$ e $\Delta X \Delta P$ para o oscilador harmônico no estado $|n\rangle$.

Questão 06:

Mostre que, para o oscilador harmônico quântico,

$$\langle n| X^4 |n\rangle = \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^2 [3 + 6n(n+1)]\,,$$

onde $|n\rangle$ é um autoestado de H.

Questão 07:

Em $t = 0$, uma partícula se encontra no estado

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + |1\rangle\right)$$

Encontre:

(a) $|\psi(t)\rangle$.

(b) $\langle X(0)\rangle$ e $\langle P(0)\rangle$.

(c) $\langle X(t)\rangle$ e $\langle P(t)\rangle$.

Questão 08:

Mostre que

(a) $\langle a(t)\rangle = e^{-i\omega t}\langle a(0)\rangle$.

(b) $\langle a^\dagger(t)\rangle = e^{i\omega t}\langle a^\dagger(0)\rangle$.

Questão 09:

Projete a equação

$$a|0\rangle = 0$$

na base P e obtenha $\psi_0(p)$, já calculado na Questão 04.

Questão 10:

Projete a equação

$$a|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle$$

na base X e obtenha a relação de recorrência

$$H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x),$$

onde $H_n(x)$ é um polinômio de Hermite de ordem n.

Questão 11:

Partindo da equação

$$a + a^\dagger = \sqrt{2}y$$

e da equação

$$(a + a^\dagger)\,|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle + \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle\,,$$

derive a relação de recorrência

$$H_{n+1}(y) = 2yH_n(y) - 2nH_{n-1}(y).$$

Questão 12:

O oscilador harmônico está em tal estado que a medida da energia produziria tanto $(1/2)\hbar\omega$ quanto $(3/2)\hbar$, com igual probabilidade. Qual é o maior valor possível de $\langle p \rangle$ nesse caso? Se esse valor máximo for aceito no tempo $t = 0$, qual é o $\Psi(x, t)$?

Questão 13:

Nesse problema exploramos alguns teoremas (utilizados sem prova) mais úteis que envolvem os polinômios de Hermite.

(a) A fórmula de Rodrigues diz que

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \left(\frac{d}{dx} \right)^n e^{-x^2}.$$

Use-a para obter H_3 e H_4.

(b) A relação de recursão seguinte dá H_{n+1} em termos dos dois polinômios de Hermite precedentes:

$$H_{n+1}(x) = 2nH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$$

Use-a, juntamente com a resposta do item (a), para obter H_5 e H_6.

(c) Se você diferenciar um polinômio de n-ésima ordem, obterá um polinômio de ordem $n - 1$. Para polinômios de Hermite, na verdade,

$$\frac{dH_n}{dx} = 2nH_{n-1}(x).$$

Verifique isso diferenciando H_5 e H_6.

(d) $H_n(x)$ é a n-ésima derivada em z, da função geradora e^{-z^2+2zx}; ou, em outras palavras, é o coeficiente de $z^n/n!$ na expansão da série de Taylor para essa função:

$$e^{-z^2+2zx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} H_n(x).$$

Use isso para obter H_0, H_1 e H_2.

Respostas

Questão 5

$\langle X \rangle = 0$, $\langle P \rangle = 0$, $\langle X^2 \rangle = \frac{\hbar}{m\omega}\left(n + \frac{1}{2}\right)$, $\langle P^2 \rangle = m\hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$, $\Delta X \Delta P = \hbar\left(n + \frac{1}{2}\right)$

Questão 7

(a) $|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[e^{-i\omega t/2}|0\rangle + e^{-i3\omega t/2}|1\rangle\right]$, (b) $\langle X(0) \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}$, $\langle P(0) \rangle = 0$, (c) $\langle X(t) \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\cos\omega t$, $\langle P(t) \rangle = -\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\sin\omega t$

Questão 12

$\langle p \rangle_{max} = \sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}$, $\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\omega t/2}\left[\psi_0(x) + i\psi_1(x)e^{-i\omega t}\right]$