Termodinâmica II - Prova Repositiva

Prof. Marco Polo

29 de julho de 2024

Início: 13:30 - duração: 2:30 horas

Só serão consideradas as respostas que forem devidamente justificadas.
É proibido o uso de calculadoras, smartphones ou computadores.

Questão 01: (2,5) Equações de estado

Encontre as três equações de estado para um sistema com a equação fundamental

$$U = A\frac{S^3}{NV},$$

onde U é a energia interna, S é a entropia, N é o número de mols e V é o volume. A é uma constante positiva.

Questão 02: (2,5) Compressão de um gás ideal

Mostre que a relação entre a temperatura T e o volume V de um gás ideal monoatômico realizando uma compressão adiabática quase-estática é

$$T^{3/2}V = \text{constante}$$

Questão 03: Teorema do Trabalho Máximo

Dois corpos idênticos têm cada um capacidades caloríficas (em volume constante) dadas por

$$C(T) = \frac{A}{T},$$

onde A é uma constante positiva. Os dois corpos, em temperaturas iniciais de T_0 e $3T_0$, são trazidos para o equilíbrio térmico enquanto entregam o máximo de trabalho possível para uma fonte de trabalho reversível.

(a) (1,25) Qual é a temperatura de equilíbrio nesse caso?

(b) (1,25) Qual é o trabalho máximo entregue para a fonte de trabalho reversível?

Questão 04: (2,5) Dilatação térmica

Para um certo sistema de 1 mol, na vizinhança de um estado particular, uma variação dP na temperatura constante T é acompanhada por um fluxo de calor dado por $đQ = AdP$. Mostre que o coeficiente de expansão térmica desse sistema é dado por

$$\alpha = -\frac{A}{VT}$$

Definição do coeficiente de expansão térmica:

$$\alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$$

U	S, V	$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_{S,N} = -\left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_{V,N}$	(7.3)
$dU = T\,dS - P\,dV + \mu\,dN$	S, N	$\left(\frac{\partial T}{\partial N}\right)_{S,V} = \left(\frac{\partial \mu}{\partial S}\right)_{V,N}$	(7.4)
	V, N	$-\left(\frac{\partial P}{\partial N}\right)_{S,V} = \left(\frac{\partial \mu}{\partial V}\right)_{S,N}$	(7.5)
$U[T] \equiv F$	T, V	$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{T,N} = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_{V,N}$	(7.6)
$dF = -S\,dT - P\,dV + \mu\,dN$	T, N	$-\left(\frac{\partial S}{\partial N}\right)_{T,V} = \left(\frac{\partial \mu}{\partial T}\right)_{V,N}$	(7.7)
	V, N	$-\left(\frac{\partial P}{\partial N}\right)_{T,V} = \left(\frac{\partial \mu}{\partial V}\right)_{T,N}$	(7.8)
$U[P] \equiv H$	S, P	$\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_{S,N} = \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_{P,N}$	(7.9)
$dH = T\,dS + V\,dP + \mu\,dN$	S, N	$\left(\frac{\partial T}{\partial N}\right)_{S,P} = \left(\frac{\partial \mu}{\partial S}\right)_{P,N}$	(7.10)
	P, N	$\left(\frac{\partial V}{\partial N}\right)_{S,P} = \left(\frac{\partial \mu}{\partial P}\right)_{S,N}$	(7.11)
$U[\mu]$	S, V	$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_{S,\mu} = -\left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_{V,\mu}$	(7.12)
$dU[\mu] = T\,dS - P\,dV - N\,d\mu$	S, μ	$\left(\frac{\partial T}{\partial \mu}\right)_{S,V} = -\left(\frac{\partial N}{\partial S}\right)_{V,\mu}$	(7.13)
	V, μ	$\left(\frac{\partial P}{\partial \mu}\right)_{S,V} = \left(\frac{\partial N}{\partial V}\right)_{S,\mu}$	(7.14)
$U[T,P] \equiv G$	T, P	$-\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_{T,N} = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_{P,N}$	(7.15)
$dG = -S\,dT + V\,dP + \mu\,dN$	T, N	$-\left(\frac{\partial S}{\partial N}\right)_{T,P} = \left(\frac{\partial \mu}{\partial T}\right)_{P,N}$	(7.16)
	P, N	$\left(\frac{\partial V}{\partial N}\right)_{T,P} = \left(\frac{\partial \mu}{\partial P}\right)_{T,N}$	(7.17)
$U[T,\mu]$	T, V	$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{T,\mu} = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_{V,\mu}$	(7.18)
$dU[T,\mu] = -S\,dT - P\,dV$ $-N\,d\mu$	T, μ	$\left(\frac{\partial S}{\partial \mu}\right)_{T,V} = \left(\frac{\partial N}{\partial T}\right)_{V,\mu}$	(7.19)
	V, μ	$\left(\frac{\partial P}{\partial \mu}\right)_{T,V} = \left(\frac{\partial N}{\partial V}\right)_{T,\mu}$	(7.20)
$U[P,\mu]$	S, P	$\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_{S,\mu} = \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_{P,\mu}$	(7.21)
$dU[P,\mu] = T\,dS + V\,dP + N\,d\mu$	S, μ	$\left(\frac{\partial T}{\partial \mu}\right)_{S,P} = -\left(\frac{\partial N}{\partial S}\right)_{P,\mu}$	(7.22)
	P, μ	$\left(\frac{\partial V}{\partial \mu}\right)_{S,P} = -\left(\frac{\partial N}{\partial P}\right)_{S,\mu}$	(7.23)

GABARITO

1- $U = \frac{AS^3}{NV}$ $\qquad P = -\frac{\partial U}{\partial V}$ $\qquad \mu = \frac{\partial U}{\partial N}$

$U = U(S,V,N)$ $\qquad \boxed{P = \frac{AS^3}{NV^2}}$ $\qquad \boxed{\mu = -\frac{AS^3}{N^2V}}$

$T = \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_{V,N}$

$\boxed{T = \frac{3AS^2}{NV}}$

2- $PV = NRT$

$U = \frac{3}{2}NRT$

$dU = T\,\cancelto{0}{dS} - p\,dV$

$\frac{3}{2}N\cancel{R}\,dT = -\frac{N\cancel{R}T}{V}\,dV$

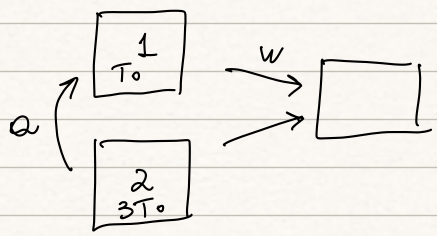
$\frac{3}{2}\int \frac{dT}{T} = -\int \frac{dV}{V}$

$\frac{3}{2}\ln T = -\ln V + C$

$\ln\left(T^{3/2}V\right) = C$

$\Rightarrow \boxed{T^{3/2}V = \text{CONSTANTE}}$

3- $C(T) = \frac{A}{T}$



$\Delta U = \int C(T)\,dT$

$\Delta U = A\int \frac{dT}{T}$

$\Delta U = A\ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right)$

$\Rightarrow$

$\Delta U = \Delta U_1 + \Delta U_2 = A\left[\ln\left(\frac{T_f}{T_0}\right) + \ln\left(\frac{T_f}{3T_0}\right)\right]$

$\Delta U = A\ln\left(\frac{T_f^2}{3T_0^2}\right) \Rightarrow W_{máx} = -A\ln\left(\frac{T_f^2}{3T_0^2}\right)$.

$\Rightarrow \Delta S = \int \frac{dQ}{T} = C\int \frac{dT}{T^2} = -\frac{C}{T}\Big|_{T_i}^{T_f}$

$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = 0$ ($W_{máx}$).

$\Delta S = \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_f}\right) + \left(\frac{1}{3T_0} - \frac{1}{T_f}\right) = 0$

$\frac{2}{T_f} = \frac{4}{3T_0} \Rightarrow 4T_f = 6T_0$

$\Rightarrow \boxed{T_f = \frac{3}{2}T_0}$ A)

B) $W_{máx} = A\ln\left(\frac{3T_0^2}{T_f^2}\right)$

$W_{máx} = A\ln\left(\frac{3T_0^2}{9/4\,T_0^2}\right)$

$\boxed{W_{máx} = A\ln(4/3)}$

4- $\alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \quad , \quad N = 1.$

$$đQ = A\,dP$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = -\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T = -\frac{1}{T}\left(\frac{\partial Q}{\partial P}\right)_T$$

$$= -\frac{1}{T}\cdot A$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{-A}{VT}}$$